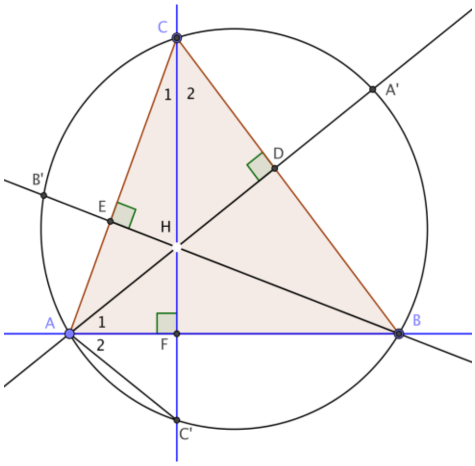
Uitwerking **Wobien Doyer en Lieke de Rooij**

Hoogtepunten uit de (analytische) meetkunde

De puzzel begon met een aantal min of meer bekende meetkundige stellingen. De antwoorden op de opgaven hebben een roze achtergrond en enkele onderliggende bewijzen en de extra opgaven staan hier aan het eind van de uitwerking met een gele achtergrond.



figuur 1

Stelling 1: De drie hoogtelijnen van een driehoek zijn concurrent. *(Er stond abusievelijk collineair, waarvoor onze verontschuldiging).*

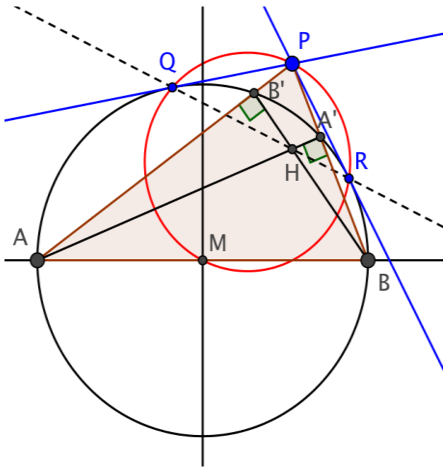
De eerste vraag ging over stelling 2 en 3:
Stelling 2: De spiegelbeelden van het hoogtepunt H in de drie zijden van driehoek ABC liggen op de cirkel door A, B en C.
Stelling 3: In een driehoek ABC zijn de producten van de stukken waarin de hoogtelijnen elkaar verdelen voor elke hoogtelijn gelijk.
Ofwel: $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF$. (zie figuur 1).(*We nemen hier alle lengtes van lijnstukken positief*)

Ook werd gegeven (noot 2): De **macht** van P ten opzichte van een cirkel is gelijk aan $PM^2 - r^2$ (r = de straal en M het middelpunt van de cirkel). En hier uit volgt de **machtstelling**: Voor elke lijn door P die een cirkel snijdt in Q en R geldt: Het product $PM \cdot PQ = |PM^2 - r^2|$ is onafhankelijk van de plaatsen van P, Q en R.
Voor de omgeschreven cirkel van driehoek ABC met hoogtepunt H geldt dan: $HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$ (zie figuur 1).

Opgave 1: Als binnenkomer werd gevraagd om uit te leggen dat stelling 3 een direct gevolg is van stelling 2. Het ging ons hier eigenlijk alleen om de analogie tussen de machtstelling en stelling 3. Hoewel niet werd gevraagd om de machtstelling te bewijzen hebben de meeste inzenders dat wel gedaan.
Voldoende was om te noemen dat uit stelling 2 volgt: $2HF = HC'$ (en $2HD = HA'$ en $2HE = HB'$), dus zijn de producten beschreven in stelling 3 de helft van de producten die volgen uit de machtstelling en dus ook alle drie gelijk.

Stelling 4: De macht van het hoogtepunt H van een driehoek ten opzichte van een cirkel met een ceviaan van de driehoek als middellijn is gelijk aan (de absolute waarde) van het in stelling 3 bedoelde product.
Gevolg 1: De macht van het hoogtepunt H ten opzichte van een cirkel die een ceviaan van de driehoek als middellijn heeft is dus voor al zulke cirkels gelijk.
Gevolg 2: En dus gaat de machtlijn van twee zulke cirkels door H.

Opgave 2: Gegeven een cirkel c met middelpunt M en een middellijn AB. Verder een punt P buiten c. Ook tekenen we de twee raaklijnen aan c door P. De raakpunten noemen we Q en R.



figuur 2

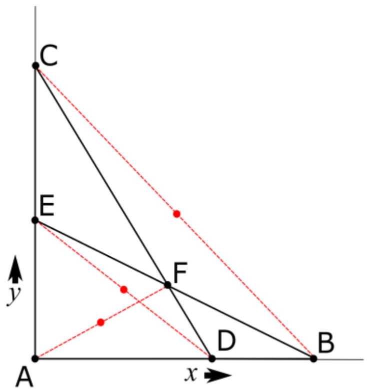
Bewijs nu: Het hoogtepunt H van driehoek PAB ligt op de lijn door Q en R, ofwel H, Q en R zijn collineair.

Analytische bewijs: (zie figuur 2).
Kies $M(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ en $P(s,t)$. Cirkel heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 1$.
AP heeft rico $t/(s + 1)$, dus de loodlijn BB' heeft rico $-(s+1)/t$. BB' heeft vergelijking $y = -(s + 1)(x-1)/t$
Analoog: AA' heeft vergelijking $y = -(s - 1)(x + 1)/t$. Snijpunt H: $x(s + 1 - s + 1) = s + 1 + s - 1$, ofwel
$2x = 2s$, dus $x = s$ en $y = -(s + 1)(s - 1)/t = (1 - s^2)/t$. Gevolg: $H(s,\ 1 - s^2)/t)$.
De lijn door Q en R is de poollijn*** van $P(s, t)$ ten opzichte van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$. Dus de poollijn heeft vergelijking $sx + ty = 1$. Invullen H geeft $s^2 + (1 - s^2) = 1$ klopt, dus H ligt op lijn door Q en R.

Synthetisch bewijs:
Teken ook een cirkel met middellijn MP (rood).
Omdat PQ raaklijn is aan de zwarte cirkel is $\angle PQM = 90^\circ$. Analoog: $\angle PRM = 90^\circ$.
Omdat PM middellijn is van de rode cirkel liggen volgens Thales Q en R op de rode cirkel. Maar ze liggen ook op de zwarte cirkel (raakpunten), dus de lijn QR is de machtlijn van P ten opzichte van allebei die cirkels.
MP is ceviaan van $\triangle ABP$ en middellijn van de rode cirkel.
AB is ceviaan van $\triangle ABP$ en middellijn van de zwarte cirkel.
Het gevolg 1 van stelling 4 zegt dus dat de macht van H ten opzichte van beide cirkels gelijk is. En volgens gevolg 2 ligt het hoogtepunt H dus op de machtlijn van die twee cirkels en dat is de lijn door Q en R.

De volgende vragen gingen over een volledige vierzijde, afgekort VV:
Een VV is de figuur gevormd door vier lijnen (geen twee evenwijdig en geen drie door een punt) en hun zes snijpunten. Elke combinatie van drie van die lijnen sluit een driehoek in, dat zijn er dus vier. De drie lijnstukken tussen twee snijpunten die niet op eenzelfde lijn liggen noemen we de diagonalen van de vierzijde.
Stelling 5: De vier hoogtepunten van de vier driehoeken van een VV zijn collineair.
Stelling 6a: De middens van de drie diagonalen van een VV zijn collineair.
Stelling 6b: De lijn van 6a staat loodrecht op de lijn door de hoogtepunten van stelling 5.
Stelling 6c: De drie cirkels met de drie diagonalen van een VV als middellijn hebben een gemeenschappelijke machtlijn. Deze valt samen met de lijn door de hoogtepunten van stelling 5.

Opgave 3a: Gevraagd werd een analytisch bewijs van stelling 6a. Om het iets makkelijker te maken vroegen we dat voor een VV met een rechte hoek A. (zie figuur 3). We moeten dus bewijzen dat de middens van AF, DE en BC op één lijn liggen.
Sommige inzenders stelden twee van de coördinaten op 1.
Dat mag in dit geval, omdat ook als je de figuur horizontaal of verticaal uitrekt middens middens blijven en collineaire punten blijven collineair.



figuur 3

Dat bracht ons op het idee om te kiezen voor $F(1,1)$, rico $CD = -s$ en rico $BE = -t$. Dan $B(1/t + 1, 0)$; $C(0, s + 1)$; $D(1/s + 1, 0)$ en $E(0, t + 1)$. Het midden M_1 van DE is $(½(1/s + 1); ½(t + 1))$;
Midden M_2 van BC is $(½(1/t + 1); ½(s + 1))$. Het midden M_3 van AF is $(½; ½)$.

Rico M_3M_1 is $(t + 1 - 1)/(1/s + 1 - 1) = st$ en analoog ook rico $M_3M_2 = st$. Dus M_1, M_2 en M_3 zijn collineair.

Opgave 3b: Bewijs stelling 6a, ook weer in geval hoek *A* recht is.

Het gaat om de hoogtepunten van $\triangle ADC$, $\triangle ABE$, $\triangle FEC$ en $\triangle BDF$.

Omdat hoogtepunten na uitrekken van de figuur in horizontale of verticale richting geen hoogtepunten meer zijn mogen we nu niet zomaar twee coördinaten op 1 stellen.

We kiezen nu voor $A(0,0)$; $B(b,0)$; $C(0,c)$, $D(d,0)$ en $E(0,e)$.

Het moge duidelijk zijn in dit geval de hoogtepunten van $\triangle ADC$ en $\triangle ABE$ samen vallen in $A(0,0)$.

Dan rico $BE = -e/b$, dus rico loodlijn uit *C* en *D* op *BE* is b/e. Analoog rico uit *B* en *E* op *CD* is d/c.

Vergelijking loodlijn uit *D* op *BE* is $y = b(x - d)/e$; uit *B* op *CD* : $y = d(x - b)/c$.

Snijpunt = hoogtepunt H_1 van $\triangle BDF$: $(b/e - d/c)x = bd(1/e - 1/c)$, of $(bc - de)x = bd(c - e)$,

dus $\boldsymbol{x = bd(c - e)/(bc - de)}$ en

$y = b\{bd(c - e)/(bc - ed) - d\}/e = b(bcd - bde - bcd + d^2e)/e = -b^2d + bd^2$, of $\boldsymbol{y = bd(-b + d)/(bc - de)}$.

Dus rico $AH_1 = -(b - d)/(c - e)$

Vergelijking loodlijn uit *C* op *BE* is $y = bx/e + c$; uit *E* op *CD*: $y = dx/c + e$.

Snijpunt is hoogtepunt H_2 van $\triangle FEC$: $x(b/e - d/c) = e - c$ of $\boldsymbol{x = -ce(c - e)/(bc - de)}$

en $y = bc(e - c)/(bc - de) + c = (bce - bc^2 + bc^2 - cde)/(bc - de)$, dus $\boldsymbol{y = ce(b - d)/(bc - de)}$.

Dus rico $AH_2 = -(b - d)/(c - e)$, net als rico AH_1. Conclusie: De vier hoogtepunten zijn collineair.

Opgave 3c: De richtingscoëfficiënt van de lijn door de vier hoogtepunten is uit te drukken in de verhouding van lijnstukjes uit de figuur. Hoe?

We zien uit het resultaat van opgave 3a: rico = $-(b - d)/(c - e)$ en dat zijn de lijnstukjes $-BD / CE$.

Opgave 3d: Toon aan dat de bedoelde lijnen uit 3a en 3b loodrecht op elkaar staan.

Omdat we bij het bewijs van stelling 6a hebben gekozen voor $F(1,1)$ kunnen we de gevonden richtingscoëfficiënt *st* hier niet zomaar gebruiken. We gebruiken dus de keuze van coördinaten zoals in opgave 3c.

Dan geldt: $M_1(\tfrac{1}{2}d, \tfrac{1}{2}e)$ en $M_2(\tfrac{1}{2}b, \tfrac{1}{2}c)$, dus de rico van M_1M_2 is $(c - e)/(b - d) = CE/BD$.

De rico van de lijn door de hoogtepunten was $-BD/CE$. Het product is -1, dus de lijnen staan loodrecht op elkaar.

Als extra werd gevraagd naar een algemeen bewijs van stellingen 5 en 6, dus met hoek *A* niet per se recht.

Stelling 6a algemeen: Ook bij scheve parallel projectie van de figuur, zodat hoek *A* niet meer recht is, blijven middens middens en collineaire punten blijven collineair. Dus 6a geldt ook als hoek *A* niet recht is.

Voor een algemeen analytisch bewijs van **stelling 5** moeten we de coördinaten anders kiezen. Het wordt dan een heel gedoe, maar het bewijs is wel mogelijk. We kiezen echter voor een eenvoudiger synthetisch bewijs met gebruik van stelling 4 en 6a.

Volgens het gevolg 2 van stelling 4 ligt het hoogtepunt van een driehoek op de machtlijn van twee cirkels die elk een ceviaan van de driehoek als middellijn hebben.

Tekenen we drie cevianen, weer als middellijn van nu drie cirkels, (elk vanuit een ander hoekpunt), dan zijn er ook drie machtlijnen. Het hoogtepunt van de driehoek ligt dan op elk van die drie machtlijnen. Dat kan dus een gemeenschappelijk snijpunt zijn, of die machtlijnen vallen samen.

In het geval dat die machtlijnen samenvallen, liggen de middelpunten van die cirkels op een lijn.

En dat is het geval bij de VV.

Synthetisch algemeen bewijs stelling 5, 6b en 6c: Allereerst constateren we dat de drie diagonalen elk cevianen zijn van elk van de vier driehoeken in de VV. En we zagen al dat de middens van die diagonalen collineair zijn (opgave 3b algemeen). De drie cirkels met die diagonalen als middellijn moeten dan dus (volgens het gevolg 2 van stelling 4) een gemeenschappelijke machtlijn hebben **(6b)** waar elk van de vier hoogtepunten op ligt. Dus ook die vier hoogtepunten zijn collineair (**stelling 5**). En bovendien, als die drie cirkels een gemeenschappelijke machtlijn hebben, dan staat de lijn door de drie middens loodrecht op die gemeenschappelijke machtlijn (**6c**).

Rest nog de onderliggende stellingen te bewijzen.
Allereerst zijn we steeds uitgegaan van het feit dat de drie hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn. En, hoewel er veel bewijzen [1] mogelijk zijn, noemden we al dat we dat vrij eenvoudig analytisch kunnen bewijzen.

Analytisch bewijs stelling 1: Gegeven driehoek *ABC* met hoogtelijnen *AD*, *BE* en *CF*, met *x*-as = lijn door *A* en *B* en *y*-as = lijn door *F* en *C* .

F(0,0), *A*(*a*,0), *B*(*b*,0), *C*(0,1).
Te bewijzen: *AD* en *BE* snijden de hoogtelijn uit *C* (dus de *y*-as) in eenzelfde punt *H*.

Rico(*BC*) = -1/*b*, dus rico (*AD*) = b. Dus *AD*: $y = b(x - a)$. Analoog: *BE*: $y = a(x - b)$.
Invullen $x = 0$ geeft voor beide lijnen het snijpunt met de *y*-as in (0,-*ab*).
Dus het hoogtepunt *H*(0,-*ab*) ligt op *CF* en de drie hoogtelijnen gaan door één punt .

Een synthetisch bewijs van stelling 2 en de machtstelling:
$\angle A_2 = \angle C_2$ (gelijke boog *BC'*); $\angle C' = \angle B$ (gelijke boog *AC*)
$\angle A_2 + \angle C' = 90^\circ$ ($\angle F = 90^\circ$), dus ook $\angle A_2 + \angle B = 90^\circ$
en $\angle A_1 + \angle B = 90^\circ$ (**$\angle D = 90^\circ$**). Dus $\angle A_1 = \angle A_2$.
En $AF = AF$, $\angle AFH = \angle AFC' = 90^\circ$, dus $\triangle AFH \cong \triangle AFC'$ (zhh).
Gevolg: $FH = FC'$, dus *C'* is het spiegelbeeld van *H* in *AB* ligt op de cirkel.
Analoog geldt dat ook voor de spiegelbeelden van *H* in *BC* en *AC*.

Merk op dat zowel stelling 2 als de machtstelling natuurlijk ook direct konden worden bewezen met hulp van gelijkvormigheid:
<u>Stelling 2:</u> Uit $\triangle AFH \approx \triangle CDH$ (hh) volgt $HC \cdot HF = HA \cdot HD$ (en analoog ook $HC \cdot HF = HB \cdot HE$).
<u>Machtstelling</u> (noot 2 van deze puzzel in *Euclides* 93-3): Uit $\triangle AHC' \approx \triangle CHA'$ (hh) volgt $HA \cdot HA' = HC \cdot HC'$ (en analoog ook $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$).

Noot
[1] Zie de verschillende bewijzen van Dick Klingens op http://home.hccnet.nl/d.klingens/downloads/Hoogtelijnen(vs2.3e).pdf